Holomorphie de la transformée de Laplace

On rappelle : $F(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$ où f est une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On rappelle aussi que s'il existe un réel α tel que pour tout p∈ℂ, $\mathcal{R}(p)>\alpha$, F(p) existe.
α étant l'abscisse de convergence de f(t), positionnons l'abscisse de convergence α' de tf(t) :

Pour t≥1 : $|f(t)|\le|tf(t)|\Rightarrow|f(t)e^{-\alpha t}|\le|tf(t)e^{-\alpha t}|$ =>l'abscisse de convergence α'de tf(t) est donc tel que α≤ α' : L'intégrabilité de $tf(t)e^{-pt}$ assure donc l'intégrabilité de $f(t)e^{-pt}$.

$$\forall x>0,\left(te^{-xt}\right)e^{\frac{xt}{2}}=te^{-\frac{xt}{2}}\Rightarrow\lim_{t\to\infty}te^{-\frac{xt}{2}}=0$$

D'après le théorème de croissances comparées, il existe ε>0 tel que pour tout x≥ ε :

$$\left(te^{-xt}\right)e^{\frac{xt}{2}}\le 1\Rightarrow\left|tf(t)e^{-xt}\right|e^{\frac{xt}{2}}\le|f(t)|\Rightarrow\left|tf(t)e^{-xt}\right|\le\left|f(t)e^{-\frac{xt}{2}}\right|\Rightarrow\alpha'\le\alpha$$

Donc : $\alpha'=\alpha$

Il en résulte que $t^m f(t)$ est localement intégrale et que $F_m(p)=\int_0^{\infty}t^m f(t)e^{-pt}dt$ est convergente avec la même abscisse de convergence α que f. $F_m(p)$ étant absolument convergente, il est donc possible de dériver sous le signe somme. En notant p=x+iy :

$$\begin{cases}\dfrac{\delta F_m(p)}{\delta x}=\displaystyle\int_0^{\infty}t^m f(t)\frac{\delta}{\delta x}e^{-(x+iy)t}dt=-\int_0^{\infty}t^{m+1}f(t)e^{-(x+iy)t}dt\\ \dfrac{\delta F_m(p)}{\delta y}=\displaystyle\int_0^{\infty}t^m f(t)\frac{\delta}{\delta y}e^{-(x+iy)t}dt=-i\int_0^{\infty}t^{m+1}f(t)e^{-(x+iy)t}dt\end{cases}\Rightarrow\frac{\delta F_m(p)}{\delta x}=i\frac{\delta F_m(p)}{\delta y}$$

Les conditions de Cauchy-Riemann sont donc satisfaites. F_m est donc holomorphe dans le demi-plan et on peut écrire :

$$\frac{\delta F_m(p)}{\delta p}=(-)\int_0^{\infty}t^{m+1}f(t)e^{-pt}dt=(-1)F_{m+1}(p)$$

Et : $F^{(1)}(p)=(-)\int_0^{\infty}tf(t)e^{-pt}dt=(-1)F_1(p)\Rightarrow F^{(n)}(p)=(-1)^n F_n(p)$