Polynômes de Laguerre. Transformée de Laplace et fonction génératrice

On doit se placer dans $\mathbb{R}^+$ pour que la transformée de Laplace (TL) soit définie

$$L_n(x) = \mathscr{Y}(x).e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(f(x).e^{-x}\right)$$

On calcule tout d'abord la TL de $\mathscr{Y}(x).x^n$: $\mathscr{L}(x^n) = A_n(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zx} x^n \, dx$

On intègre par parties :

$$dv = \frac{d}{dx}(e^{-zx})dx \Rightarrow v = \frac{e^{-zx}}{-z} \qquad \text{et } u = x^n \Rightarrow du = nx^{n-1}dx$$

$$\Rightarrow A_n(z) = \left[\frac{e^{-zx}}{-z}x^n\right]_0^{+\infty} + \frac{n}{z}\int_0^{+\infty} e^{-zx}x^{n-1}\,dx = \frac{n}{z}A_{n-1}(z) = \frac{n(n-1)}{z^2}A_{n-2}(z) = \frac{n!}{z^n}A_0(z)$$

$$\text{avec : } A_0(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zx}\,dx = \frac{\left[e^{-zx}\right]_0^{+\infty}}{-z} = \frac{1}{z} \Rightarrow A_n(z) = \frac{n!}{z^{n+1}}$$

Calculons maintenant la TL de la fonction $\mathscr{Y}(x).f(x).e^{-x}$

$$\mathscr{L}(\mathscr{Y}(x).f(x).e^{-x}) = \int_0^{+\infty} f(x).e^{-x(1+z)}dx = F(z+1)$$

$$\text{Avec } f(x) = x^n \Rightarrow \mathscr{L}(\mathscr{Y}(x).x^n.e^{-x}) = \int_0^{+\infty} x^n.e^{-x(1+z)}dx = B_n(z)$$

$$\Rightarrow B_n(z-1) = \int_0^{+\infty} x^n.e^{-xz}dx = A_n(z) \Rightarrow B_n(z) = A_n(z+1) = \frac{n!}{(z+1)^{n+1}} = \mathscr{L}(\mathscr{Y}(x).x^n.e^{-x})$$

Calculons maintenant la TL de la fonction $\mathscr{Y}(x).e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(f(x).e^{-x}\right)$

$$C_n(z) = \mathscr{L}\left(e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(f(x).e^{-x}\right)\right) = \int_0^{+\infty} e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(f(x).e^{-x}\right)e^{-zx}dx$$

On rappelle la formule de Leibniz : $(fg)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}f^{(p)}g^{(n-p)}$

$$\Rightarrow \left(x^n e^{-x}\right)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\left(x^n\right)^{(p)}\left(e^{-x}\right)^{(n-p)} \qquad \text{cette fonction est bien intégrable sur } \mathbb{R}^+$$

$$\text{avec : } \left(x^n\right)^{(p)} = n(n-1)....(n-p+1)x^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!}x^{n-p}$$

$$\text{et : } \left(e^{-x}\right)^{(n-p)} = (-1)^{n-p}e^{-x} \Rightarrow \left(x^n e^{-x}\right)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\frac{n!}{(n-p)!}x^{n-p}(-1)^{n-p}e^{-x}$$

$$C_n(z)=\mathscr{L}\left(e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n.e^{-x}\right)\right) = \int_0^{+\infty} e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n.e^{-x}\right) e^{-zx}dx$$

$$C_n(z) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \frac{n!(-1)^{n-p}}{(n-p)!}\int_0^{+\infty} x^{n-p}e^{-xz}dx$$

$$=\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}\frac{n!(-1)^{n-p}}{(n-p)!}D_n(z)$$

En intégrant par parties: $du=e^{-xz}dx \Rightarrow u=-\frac{e^{-xz}}{z}$

$v=x^{n-p} \Rightarrow dv=(n-p)x^{n-1-p}dx$

$$\Rightarrow D_n(z)=\left[-\frac{e^{-xz}}{z}x^{n-p}\right]_0^{+\infty} + \frac{n-p}{z}\int_0^{+\infty} e^{-xz}x^{n-1-p}dx = \frac{n-p}{z}D_{n-1}(z)$$

$$=\frac{n-p}{z}\frac{n-p-1}{z}D_{n-2}(z)=\frac{n-p}{z}\frac{n-p-1}{z}$$

$$\dots\dots\frac{n-p-j}{z}D_{n-(j+1)}(z)\frac{n-p-(n-p-1)}{z}D_{n-(n-p-1+1)}(z)$$

$$=\frac{(n-p)!}{z^{n-p}}D_p(z)=\frac{(n-p)!}{z^{n-p}}\int_0^{+\infty}e^{-xz}dx=\frac{(n-p)!}{z^{n-p+1}}\Rightarrow C_n(z)=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\frac{n!(-1)^{n-p}}{(n-p)!}\frac{(n-p)!}{z^{n-p+1}}$$

$$=\frac{n!}{z}\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\left(-\frac{1}{z}\right)^{n-p}=\frac{n!}{z}\sum_{p=0}^{n}\frac{n!}{p!(n-p)!}\left(-\frac{1}{z}\right)^{n-p}=\frac{n!}{z}\left(1-\frac{1}{z}\right)^n=\frac{n!}{z}\left(\frac{z-1}{z}\right)^n=\mathscr{L}\left(e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n.e^{-x}\right)\right)$$

La fonction génératrice des polynômes de Laguerre étant alors $G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}L_n(x)\frac{t^n}{n!}$

Sa transformée de Laplace est alors :

$$\mathscr{L}\left[G(x,t)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\mathscr{L}\left[L_n(x)\right]\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{z}\left(\frac{z-1}{z}\right)^n\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(t-\frac{t}{z}\right)^n$$

La convergence de la série est obtenue pour : $\left|t-\frac{t}{z}\right|<1$

Dans ces conditions, on a : $\sum_{n=0}^{\infty}\left(t-\frac{t}{z}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(t-\frac{t}{z}\right)^{n+1}}{1-\left(t-\frac{t}{z}\right)}=\frac{1}{1-t+\frac{t}{z}}$

$$\Rightarrow \mathscr{L}\left[G(x,t)\right]=\frac{1}{z}\frac{1}{1-t+\frac{t}{z}}=\frac{1}{z-zt+t}=\frac{1}{z(1-t)+t}=\frac{1}{1-t}\frac{1}{z+\frac{t}{1-t}}\Rightarrow G(x,t)=\frac{1}{1-t}e^{-x\frac{t}{1-t}}$$

En effet : $\mathscr{L}\left[e^{-ax}\right]=\int_0^{+\infty}e^{-ax}e^{-zx}dx=\int_0^{+\infty}e^{-x(z+a)}dx=\frac{1}{z+a}$