Antoine Tardivo	TF d'une fonction radiale dans $\mathbb{R}^n$	Le 4 décembre 2015

La transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^n$ d'une fonction radiale

Cas où f est une fonction de $\mathbb{R}n$ dans $\mathbb{R}$, appartenant à $L^1_m(\mathbb{R}^n)$. On a alors :

$$\hat{f}(t_1, t_2, ..., t_n) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, x_2, ..., x_n) e^{2\pi i(t_1x_1+t_2x_2+.....+t_nx_n)} dx_1dx_2....dx_n$$

Si on se place dans le cas où f est radiale ou à symétrie sphérique alors f ne dépend des variables $x_1,\ldots x_n$ que par l'intermédiaire de la variable $\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$. On montre alors que $\hat{f}$ ne dépend des variables $t_1,\ldots t_n$ que par l'intermédiaire de la variable $\tau = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + ... + t_n^2}$

Soit $f(x_1,\ldots x_n) = g(\rho)$

En notant les vecteurs : $\vec{\rho} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$ et : $\vec{\tau} = \begin{pmatrix} t_1 \\ \\ t_n \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\rho}.\vec{\tau} = \rho\tau\cos\theta = x_1t_1 + ... + x_nt_n$

En passant des coordonnées cartésiennes aux cordonnées polaires dans $\mathbb{R}^n$

$$\hat{f}(\vec{\tau}) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\rho) e^{2\pi i\vec{\tau}.\vec{\rho}} d^n\rho = \int_{\mathbb{R}^n} g(\rho) e^{2\pi i\tau\rho\cos\theta} d^n\rho$$

Considérons la rotation $\mathscr{R}$ telle que: $\vec{\tau'} = \mathscr{R}(\vec{\tau})$

$$\Rightarrow \hat{f}(\vec{\tau'}) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\rho) e^{2\pi i\vec{\tau'}.\vec{\rho}} d^n\zeta = \int_{\mathbb{R}^n} g(\rho) e^{2\pi i\mathscr{R}(\vec{\tau}).\vec{\rho}} d^n\rho$$

On ne change rien à l'intégrale si on remplace $\vec{\rho}$ par $\mathscr{R}(\vec{\rho})$ du fait que f est radiale :

$$\hat{f}(\vec{\tau'}) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\rho) e^{2\pi i\mathscr{R}(\vec{\tau}).\mathscr{R}(\vec{\rho})} d^n\left[\mathscr{R}(\vec{\rho})\right]$$

Avec : $\vec{\tau}.\vec{\rho} = \mathscr{R}(\vec{\tau}).\mathscr{R}(\vec{\rho}) = \tau\rho\cos\theta$ et $d^n\left[\mathscr{R}(\vec{\rho})\right] = d^n\rho$

$$\Rightarrow \hat{f}(\vec{\tau'}) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\rho) e^{2\pi i\tau\rho\cos\theta} d^n\rho = \int_{\mathbb{R}^n} g(\rho) e^{2\pi i\tau\rho\cos\theta} d^n\rho = \hat{f}(\vec{\tau})$$

La transformée de Fourier d'une fonction radiale est donc aussi une fonction radiale (qui ne dépend que de $\left\|\vec{\tau}\right\|$)

On rappelle la correspondance entre coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires dans $\mathbb{R}^n$ (coordonnées appelées « hypersphériques »):

$$x_i = \rho\cos(\varphi_{n-i+1})\prod_{k=1}^{n-i}\sin(\varphi_k)$$

On montre par ailleurs que le jacobien de la transformation des coordonnées cartésiennes en coordonnées hypersphériques est :

$$J = \rho^{n-1}\prod_{i=1}^{n-2}\sin^{n-1-i}(\varphi_i)$$

$$\text{donc : } \hat{f}(\vec{\tau}) = \int_{\mathbb{R}^n} g(\rho)e^{2\pi i\rho\tau\cos\theta}\rho^{n-1}d\varphi_{n-1}d\rho\prod_{j=1}^{n-2}\sin^{n-1-j}(\varphi_j)d\varphi_j$$

Du fait de la symétrie radiale, on ne change rien de l'intégrale si on place $\vec{\tau}$ parallèle à l'axe x_1.
Cela revient donc à considérer $\theta = \varphi_1$ (et indépendant des $\varphi_{j\neq 1}$)

$$\Rightarrow \hat{f}(\vec{\tau}) = \int_0^{+\infty} g(\rho)\rho^{n-1}d\rho\underbrace{\left(\int_0^{\pi}\sin^{n-2}(\theta)e^{2\pi i\rho\tau\cos\theta}d\theta\right)}_{\langle 2\rangle}\underbrace{\left(\prod_{j=2}^{n-2}\int_{\varphi_j=0}^{\pi}\sin^{n-1-j}(\varphi_j)d\varphi_j\right)}_{\langle 1\rangle}\left(\int_0^{2\pi}d\varphi_{n-1}\right)$$

- Calcul de $\langle 1\rangle$

Posons $I_j = \int_{\varphi_j=0}^{\pi}\sin^{n-1-j}(\varphi_j)d\varphi_j$

On reconnaît ici la fonction Bêta :

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}\alpha\cos^{2q-1}\alpha d\alpha = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad \text{avec p et q réels positifs}$$

En posant : $2p-1 = n-1-j \Rightarrow p = \frac{n-j}{2}$ et : $2q-1 = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow I_j = \int_0^{\pi}\sin^{n-1-j}\varphi_j d\varphi_j = \frac{\Gamma(\frac{n-j}{2})\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\frac{n-j+1}{2})}$$

$$\Rightarrow \prod_{j=2}^{n-2}\frac{\Gamma(\frac{n-j}{2})\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\frac{n-j+1}{2})} = \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{n-3}\frac{\Gamma(\frac{n-2}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\frac{\Gamma(\frac{n-3}{2})}{\Gamma(\frac{n-2}{2})}\frac{\Gamma(\frac{n-4}{2})}{\Gamma(\frac{n-3}{2})}\cdots\cdots\frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{4}{2})}\frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{\pi^{\frac{n-3}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

avec $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

$$\Rightarrow \hat{f}(\vec{\tau}) = 2\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\int_0^{+\infty} g(\rho)\rho^{n-1}d\rho\underbrace{\left(\int_0^{\pi}\sin^{n-2}(\theta)e^{2\pi i\rho\tau\cos\theta}d\theta\right)}_{<2>}$$

On notera au passage, avec : $2p-1=n-2 \Rightarrow p=\dfrac{n-1}{2}$ et $q=\dfrac{1}{2}$

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}\alpha d\alpha=\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\alpha d\alpha=\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\Rightarrow\Gamma(\frac{n-1}{2})=\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\alpha d\alpha$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\vec{\tau})=2\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^{+\infty}g(\rho)\rho^{n-1}d\rho\frac{\left(\int_0^{\pi}\sin^{n-2}(\theta)e^{2\pi i\rho\tau\cos\theta}d\theta\right)}{\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\alpha d\alpha}$$

◦ Calcul de $\langle 2\rangle$

Considérons la fonction : $L_n(z)=\dfrac{\int_0^{\pi}e^{iz\cos\theta}\sin^{n-2}\theta d\theta}{\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\theta d\theta}$ $\qquad L_n(0)=1$

On a alors :

$$\frac{dL_n(z)}{dz}=\frac{\int_0^{\pi}i\cos\theta\sin^{n-2}\theta e^{iz\cos\theta}d\theta}{\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\theta d\theta}$$

Intégrons par parties $I=\int_0^{\pi}\cos\theta\sin^{n-2}\theta e^{iz\cos\theta}d\theta$

$du=\cos\theta\sin^{n-2}\theta d\theta\Rightarrow u=\dfrac{\sin^{n-1}\theta}{n-1}$ $\qquad v=e^{iz\cos\theta}\Rightarrow dv=-iz\sin\theta e^{iz\cos\theta}d\theta$

$$\Rightarrow I=\left[\frac{\sin^{n-1}\theta}{n-1}e^{iz\cos\theta}\right]_0^{\pi}+\frac{iz}{n-1}\int_0^{\pi}\sin^{n}\theta\, e^{iz\cos\theta}d\theta=\int_0^{\pi}\cos\theta\sin^{n-2}\theta e^{iz\cos\theta}d\theta$$

$$\Rightarrow\frac{dL_n(z)}{dz}=\frac{-z}{n-1}\frac{\int_0^{\pi}\sin^{n}\theta\, e^{iz\cos\theta}d\theta}{\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\theta d\theta}\Rightarrow\frac{\int_0^{\pi}\sin^{n}\theta\, e^{iz\cos\theta}d\theta}{\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\theta d\theta}=-\frac{n-1}{z}\frac{dL_n(z)}{dz}$$

$$\text{et} : \frac{d^2L_n(z)}{dz^2} = -\frac{\int_0^\pi \cos^2\theta \sin^{n-2}\theta e^{iz\cos\theta}d\theta}{\int_0^\pi \sin^{n-2}\theta d\theta} = -\frac{\int_0^\pi (1-\sin^2\theta)\sin^{n-2}\theta e^{iz\cos\theta}d\theta}{\int_0^\pi \sin^{n-2}\theta d\theta}$$

$$= -\frac{\int_0^\pi \sin^{n-2}\theta e^{iz\cos\theta}d\theta}{\int_0^\pi \sin^{n-2}\theta d\theta} + \frac{\int_0^\pi \sin^{n}\theta e^{iz\cos\theta}d\theta}{\int_0^\pi \sin^{n-2}\theta d\theta}$$

$$= -L_n(z) + \frac{\int_0^\pi \sin^{n}\theta e^{iz\cos\theta}d\theta}{\int_0^\pi \sin^{n-2}\theta d\theta} = -L_n(z) - \frac{n-1}{z}\frac{dL_n(z)}{dz} \Rightarrow \frac{d^2L_n(z)}{dz^2} + \frac{n-1}{z}\frac{dL_n(z)}{dz} + L_n(z) = 0$$

On reconnaît ici une équation qui est proche de l'équation différentielle de Bessel. Pour faire disparaître le facteur $n-1$ du deuxième terme, posons : $L_n(z) = a_n z^{-m} J_m(z)$

$$\Rightarrow \frac{dL_n(z)}{dz} = -a_n m z^{-m-1} J_m(z) + a_n z^{-m}\frac{dJ_m(z)}{dz}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2L_n(z)}{dz^2} = a_n m(m+1) z^{-m-2} J_m(z) - 2a_n m z^{-m-1}\frac{dJ_m(z)}{dz} + a_n z^{-m}\frac{d^2J_m(z)}{dz^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2J_m(z)}{dz^2} + \left(\frac{n-1-2m}{z}\right)\frac{dJ_m(z)}{dz} + \left(\frac{m(m-n+2)}{z^2}+1\right)J_m(z) = 0$$

Si on pose $n-1-2m = 1 \Rightarrow m = \frac{n-2}{2} \Rightarrow m(m-n+2) = -\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dz^2}J_{\frac{n-2}{2}}(z) + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}J_{\frac{n-2}{2}}(z) + \left(1-\left(\frac{n-2}{2z}\right)^2\right)J_{\frac{n-2}{2}}(z) = 0$$

Il s'agit de l'équation différentielle de Bessel. $J_{\frac{n-2}{2}}$ est donc la fonction de Bessel solution de l'équation.

$$J_{\frac{n-2}{2}}(z) = \frac{z^{\frac{n-2}{2}}}{a_n}L_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p!\Gamma(p+\frac{n}{2})}\left(\frac{z}{2}\right)^{2p} \Rightarrow L_n(z) = a_n\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p!\Gamma(p+\frac{n}{2})}\left(\frac{z}{2}\right)^{2p}$$

$$\text{Avec} : L_n(0) = 1 = a_n\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \Rightarrow a_n = 2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\frac{n}{2}) \Rightarrow L_n(z) = \Gamma(\frac{n}{2})\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p!\Gamma(p+\frac{n}{2})}\left(\frac{z}{2}\right)^{2p} = \frac{\int_0^\pi e^{iz\cos\theta}\sin^{n-2}\theta d\theta}{\int_0^\pi \sin^{n-2}\theta d\theta}$$

$$\Rightarrow L_n(2\pi\rho\tau) = \Gamma(\frac{n}{2})\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p!\Gamma(p+\frac{n}{2})}\left(\frac{2\pi\rho\tau}{2}\right)^{2p}$$

$$\Rightarrow \langle 2\rangle = \int_0^{\pi} e^{2\pi i\rho\tau\cos\theta}\sin^{n-2}\theta d\theta = 2^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})(2\pi\rho\tau)^{-\frac{n-2}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi\rho\tau)\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\theta d\theta$$

Or, si on revient sur l'expression de la TF :

$$\hat{f}(\vec{\tau}) = 2\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^{+\infty} g(\rho)\rho^{n-1}d\rho\frac{\left(\int_0^{\pi}\sin^{n-2}(\theta)e^{2\pi i\xi\tau\cos\theta}d\theta\right)}{\int_0^{\pi}\sin^{n-2}\alpha d\alpha} = 2\pi(\tau)^{\frac{2-n}{2}}\int_0^{+\infty} g(\rho)(\rho)^{\frac{n}{2}}J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi\rho\tau)d\rho$$