Contribution Wikipédia

Démonstration du théorème de Stone-Weierstrass (Méthode des polynômes de Bernstein)

(version d'origine)

« Toute fonction continue sur un intervalle [a,b] est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynômes »

Soient les polynômes de Bernstein : $B_k^n(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\qquad 0\le k\le n\qquad$ avec $n\ge 2\in\mathbb{N}$

On peut remarquer : $\sum_{k=0}^{n}B_k^n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1$

En dérivant une fois par rapport à x, on obtient : $\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx$

Compte tenu du résultat précédent et en dérivant une nouvelle fois par rapport à x :

$$\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx(1-x+nx)$$

On obtient alors : $\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2B_k^n(x)=nx(1-x)$

- Soit un réel $\alpha>0$, un ensemble $I_n=\{0,1,\ldots,n\}$ et $x\in[0,1]$. On définit alors les ensembles complémentaires: $A_n=\{k\in I_n\ /\ \left|\frac{k}{n}-x\right|>\alpha\}\qquad$ et : $\overline{A_n}=\{k\in I_n\ /\ k\notin A_n\}$

  Montrons que $\forall x\in[0,1]\qquad \sum_{k\in A_n}B_k^n(x)\le\frac{1}{4n\alpha^2}$

Si $k\in A_n$, $\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\ge\alpha^2\Rightarrow(k-nx)^2\ge n^2\alpha^2\Rightarrow(k-nx)^2B_k^n(x)\ge n^2\alpha^2B_k^n(x)$ car $B_k^n(x)\ge 0$

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2B_k^n(x)\ge\sum_{k\in A_n}(k-nx)^2B_k^n(x)\ge n^2\alpha^2\sum_{k\in A_n}B_k^n(x)\Rightarrow\sum_{k\in A_n}B_k^n(x)\le\frac{nx(1-x)}{n^2\alpha^2}$$

x(1-x) atteint son maximum dans [0,1] en $1/2\quad\Rightarrow\sum_{k\in A_n}B_k^n(x)\le\frac{nx(1-x)}{n^2\alpha^2}=\frac{1}{4n\alpha^2}$

- *Soit la suite de polynômes :* $S_n(f)=\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n}).B_k^n$ *où f est une fonction continue sur [0,1]*

Montrons que cette suite converge uniformément vers f sur [0,1] f est, par hypothèse, continue sur [0,1]. L'intervalle [0,1] étant compact, d'après le théorème de Heine, f est donc uniformément continue sur [0,1]. Il vient alors :

$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\alpha>0)\ (\forall(a,b)\in[0,1]^2)\ (|a-b|<\alpha \Rightarrow |f(a)-f(b)|<\varepsilon)$ où ε est indépendant de a et b

Donc pour $x\in[0,1]$: $f(x)-S_n(f)(x)=f(x)\sum_{k=0}^{n}B_k^n(x)-\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})B_k^n(x)=\sum_{k=0}^{n}(f(x)-f(\frac{k}{n}))B_k^n(x)$

$$\Rightarrow |f(x)-S_n(f)(x)|\le\left|\sum_{k\in A_n}(f(x)-f(\frac{k}{n}))B_k^n(x)+\sum_{k\in\overline{A_n}}(f(x)-f(\frac{k}{n}))B_k^n(x)\right|$$

$$\le\left|\sum_{k\in A_n}(f(x)-f(\frac{k}{n}))B_k^n(x)\right|+\left|\sum_{k\in\overline{A_n}}(f(x)-f(\frac{k}{n}))B_k^n(x)\right|$$

$$\le\underbrace{\sum_{k\in A_n}\left|f(x)-f(\frac{k}{n})\right|B_k^n(x)}_{\alpha_n}+\underbrace{\sum_{k\in\overline{A_n}}\left|f(x)-f(\frac{k}{n})\right|B_k^n(x)}_{\alpha'_n}=\alpha_n+\alpha'_n$$

Notons $M=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|\Rightarrow\left|f(x)-f(\frac{k}{n})\right|\le 2M\Rightarrow\alpha_n\le 2M\sum_{k\in A_n}B_k^n(x)\le\frac{M}{2n\alpha^2}$

Pour $k\in\overline{A}$ on rappelle que : $\left|\frac{k}{n}-x\right|\le\alpha\Rightarrow\left|f(\frac{k}{n})-f(x)\right|<\varepsilon$ (continuité uniforme de f)

$$\Rightarrow\alpha'_n=\sum_{k\in\overline{A_n}}\left|f(x)-f(\frac{k}{n})\right|B_k^n(x)\le\varepsilon\sum_{k\in\overline{A_n}}B_k^n(x)\le\varepsilon\Rightarrow|f(x)-S_n(f)(x)|\le\frac{M}{2n\alpha^2}+\varepsilon$$

Donc pour tout $n>N_0$ on a : $\frac{M}{2n\alpha^2}<\varepsilon$

$S_n(f)$ converge donc uniformément vers f sur [0,1]

On peut généraliser ce résultat sur tout compact [a,b] sur lequel f est continue.

Considérons la bijection Φ de [a,b] sur [0,1] : $\Phi=\begin{cases}[a,b]\to[0,1]\\ x\to\dfrac{x-a}{b-a}\end{cases}$

Sa bijection réciproque est : $\Phi^{-1}=\begin{cases}[0,1]\to[a,b]\\ x\to(b-a)x+a\end{cases}$

Posons $g=f\circ\Phi^{-1}$. On a immédiatement $f=g\circ\Phi$

Φ^{-1} étant continue, g est bien une fonction continue sur [0,1] puisque f est continue sur [a,b]

Or g étant une fonction continue sur [0,1], d'après ce qui précède, elle est bien limite uniforme sur [0,1] d'une suite de fonctions polynômes $S_n(g)$:

$$S_n(g)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k}$$

Posons $C_n(f)(x)=S_n(g)(\Phi(x))$

C_n est encore une fonction polynôme définie cette fois sur [a,b]

Soit :

$$x \in [a,b], \left| f(x) - C_n(f(x)) \right| = \left| g o \Phi(x) - S_n(g)\Phi(x) \right| = \left| (g - S_n(g)) o \Phi(x) \right|$$

$$\Rightarrow M_n = \sup_{x\in[a,b]} \left\{ \left| f(x) - C_n(f)(x) \right| \right\} = \sup_{y\in[0,1]} \left\{ \left| g(y) - S_n(g)(y) \right| \right\} \text{ puisque } \Phi \text{ est une bijection de } [a,b] \text{sur } [0,1].$$

La suite (M_n) converge vers 0 puisque la suite $(S_n(g))$ converge uniformément vers g sur [0,1]

La suite $(C_n(f))$ est donc une suite de fonctions polynômes convergeant uniformément vers f sur [a,b]

****