# Contribution Wikipédia

## Propriétés de l'opérateur « échange » dans le cadre de deux particules quantiques identiques, sans interaction

(version d'origine)

Soit un système de deux particules identiques n'interagissant pas. L'état du système est représenté par les kets normés et orthogonaux $|m,n\rangle$ représentant la particule (i) à l'état m et la particule (j) à l'état n. Soit $P_{ij}$ l'opérateur « échange » : $P_{ij}|m,n\rangle = |n,m\rangle$

- $P_{ij}$ est donc son propre inverse : On a par définition : $P_{ij}^2 = I \Rightarrow P_{ij}^{-1} = P_{ij}$
- $P_{ij}$ est un opérateur unitaire

$$P_{ij}|m,n\rangle = |n,m\rangle \Rightarrow \langle m,n|P_{ij}^\dagger = \langle n,m|$$

$$\Rightarrow \langle m',n'|P_{ij}|m,n\rangle = \langle m',n'|n,m\rangle = \delta_{m'n}\delta_{n'm}$$

$$\text{et}: \langle m',n'|P_{ij}^\dagger|m,n\rangle = \langle n',m'|m,n\rangle = \delta_{m'n}\delta_{n'm} \Rightarrow P_{ij} = P_{ij}^\dagger$$

$P_{ij}$ est donc hermitique et comme $P_{ij}P_{ij}^\dagger = P_{ij}^\dagger P_{ij} = 1$ , $P_{ij}$ est unitaire

- Les valeurs propres de $P_{ij}$ sont égales à $\pm 1$

$P_{ij}$ étant hermitique, ses valeurs propres sont réelles. Les valeurs propres de $P_{ij}^2$ étant égales à 1, les valeurs propres de $P_{ij}$ sont donc égales à ±1.

Il existe donc deux vecteurs propres tels que : $P_{ij}|\phi_s\rangle = |\phi_s\rangle$ et : $P_{ij}|\phi_a\rangle = -|\phi_a\rangle$

Compte tenu de la définition de $P_{ij}$ on peut alors choisir les vecteurs :

$|\phi_s\rangle = \frac{1}{2}(|n,m\rangle + |m,n\rangle)$ On vérifie bien $P_{ij}|\phi_s\rangle = |\phi_s\rangle$

De même en prenant : $|\phi_A\rangle = \frac{1}{2}(|nm\rangle - |mn\rangle)$ On vérifie bien $P_{ij}|\phi_a\rangle = -|\phi_a\rangle$

$|\phi_s\rangle$ et $|\phi_a\rangle$ définissent respectivement le sous-espace propre « symétrique » et le sous-espace propres « antisymétrique ».

- Si une observable A est invariante par permutation des particules alors $[A,P_{ij}]=0$

L'observable transformée par $P_{ij}$ est définie par : $A' = P_{ij}AP_{ij}^\dagger$

L'invariance se traduit par :

$$A'|mn\rangle = P_{ij}AP_{ij}^\dagger|mn\rangle = P_{ij}AP_{ij}|mn\rangle = A|mn\rangle$$

$$\Rightarrow AP_{ij}|mn\rangle = P_{ij}^{-1}A|mn\rangle = P_{ij}A|mn\rangle \Rightarrow \left(AP_{ij} - P_{ij}A\right)|mn\rangle = 0 \Leftrightarrow \left[A, P_{ij}\right] = 0$$

- Soit $H_i$ l'hamiltonien de la particule (i). Alors $P_{ij}H_iP_{ij}^\dagger = H_j$

$$\langle m',n'|P_{ij}H_iP_{ij}^\dagger|m,n\rangle = \langle m',n'|P_{ij}H_iP_{ij}|m,n\rangle = \langle m',n'|P_{ij}H_i|n,m\rangle = \langle n',m'|H_i|n,m\rangle$$

$$= E_n\langle n',m'|n,m\rangle = \langle m',n'|H_j|m,n\rangle \Leftrightarrow P_{ij}H_iP_{ij}^\dagger = H_j$$

Par symétrie on démontrera de même : $P_{ij}H_jP_{ij}^\dagger = H_i$

- Soit $H_{ij}$ l'hamiltonien total du système (i)+(j). Alors $\left[H_{ij},P_{ij}\right]=0$

$$\langle m'n'|P_{ij}H_{ij}|mn\rangle = (E_m+E_n)\langle m'n'|P_{ij}|mn\rangle = (E_m+E_n)\langle m'n'|nm\rangle = \delta_{m'n}\delta_{mn'}(E_m+E_n)$$
$$= \delta_{m'n}\delta_{mn'}(E_{n'}+E_{m'}) = (E_{n'}+E_{m'})\langle m'n'|nm\rangle = (E_{n'}+E_{m'})\langle m'n'|P_{ij}|mn\rangle = \langle m'n'|H_{ij}P_{ij}|mn\rangle$$
$$\Leftrightarrow \left[H_{ij},P_{ij}\right]=0$$

$H_{ij}$ et $P_{ij}$ commutant, il existe donc une base de vecteurs propres commune à $H_{ij}$ et $P_{ij}$.
Cette base est $\left\{|\phi_s\rangle,|\phi_a\rangle\right\}\rangle$

*****