Contribution Wikipedia

Le Lagrangien électromagnétique

(version d'origine)

Le Lagrangien électromagnétique se construit à partir de la force de Lorentz, qui rappelons-le est une force non conservative mais dérive d'un potentiel dit généralisé au sens des équations de Lagrange, c'est-à-dire son énergie potentielle V satisfait l'équation de Lagrange: $\vec{F}=\frac{d}{dt}\frac{\partial V(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial \vec{v}}-\frac{\partial V(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial \vec{r}}$ (*)

La force de Lorentz a pour expression : $\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$

D'après Maxwell :

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\delta\vec{B}}{\delta t}=-\frac{\delta}{\delta t}(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}\times(-\frac{\delta\vec{A}}{\delta t})\Rightarrow\vec{\nabla}\times(\vec{E}+\frac{\delta\vec{A}}{\delta t})=0\Rightarrow\vec{E}+\frac{\delta\vec{A}}{\delta t}=-\vec{\nabla}\varphi$$

$$\text{Donc}: \vec{F}=q(-\vec{\nabla}\varphi-\frac{\delta\vec{A}}{\delta t}+\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}))$$

Or d'après la formule de Gibbs : $\vec{v}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})=\vec{\nabla}(\vec{v}.\vec{A})-(\vec{v}.\vec{\nabla}).\vec{A}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\vec{F}=q[-\vec{\nabla}\varphi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\vec{\nabla}(\vec{v}.\vec{A})-(\vec{v}.\vec{\nabla}).\vec{A}]=-q[\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+(\vec{v}.\vec{\nabla}).\vec{A})]+q[-\vec{\nabla}\varphi+\vec{\nabla}(\vec{v}.\vec{A})]$$

$$=-q[\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+(\vec{v}.\vec{\nabla}).\vec{A}]+q\vec{\nabla}[-\varphi+(\vec{v}.\vec{A})]=-q[\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+(\vec{v}.\vec{\nabla}).\vec{A}]-\frac{\partial}{\partial\vec{r}}q[\varphi-(\vec{v}.\vec{A})]$$

$$\text{Posons}: V'=q(\varphi-(\vec{v}.\vec{A}))\Rightarrow\vec{F}=-q(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+(\vec{v}.\vec{\nabla}).\vec{A})-\frac{\partial V'}{\partial\vec{r}}$$

$$\text{Calculons}: \frac{\partial V'}{\partial\vec{v}}=-q\vec{A}\Rightarrow\frac{d}{dt}\frac{\partial V'}{\partial\vec{v}}=-q\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\text{or}: d\vec{A}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}dt+\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}dx+\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}dy+\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}dz\Rightarrow\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\dot{z}$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\frac{\partial V'}{\partial\vec{v}}=-q\frac{d\vec{A}}{dt}=-q\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}-q(\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial z}\dot{z})$$

On peut remarquer au passage:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\dot{z}=\begin{pmatrix}\dot{x}\frac{\delta A_x}{\delta x}+\dot{y}\frac{\delta A_x}{\delta y}+\dot{z}\frac{\delta A_x}{\delta z}\\ \dot{x}\frac{\delta A_y}{\delta x}+\dot{y}\frac{\delta A_y}{\delta y}+\dot{z}\frac{\delta A_y}{\delta z}\\ \dot{x}\frac{\delta A_z}{\delta x}+\dot{y}\frac{\delta A_z}{\delta y}+\dot{z}\frac{\delta A_z}{\delta z}\end{pmatrix}=(\dot{x}\frac{\delta}{\delta x}+\dot{y}\frac{\delta}{\delta y}+\dot{z}\frac{\delta}{\delta z})\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}=(\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\frac{\delta}{\delta x}\\ \frac{\delta}{\delta y}\\ \frac{\delta}{\delta z}\end{pmatrix})\begin{pmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{pmatrix}=(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{A}$$

$$\text{Donc}: \frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}+(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{A}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial V'}{\partial \vec{v}}=-q\frac{d\vec{A}}{dt}=-q[\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}+(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{A}]\Rightarrow \vec{F}=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \vec{v}}q(\varphi-(\vec{v}.\vec{A}))-\frac{\partial}{\partial \vec{r}}q(\varphi-(\vec{v}.\vec{A}))$$

$V'=q(\varphi-(\vec{v}.\vec{A}))$ satisfaisant l'équation de Lagrange (*), c'est donc l'énergie potentielle relative à la force de Lorentz dont le lagrangien est : $L=\frac{1}{2}m\vec{v}^2-q(\varphi-(\vec{v}.\vec{A}))$