Contribution Wikipédia

Démonstration de la formule de Glauber

(version d'origine)

Soient X et Y deux matrices n×n complexes

Définissons $\phi(t)=e^{Xt}e^{Yt}$ $\Rightarrow \frac{d\phi(t)}{dt}=Xe^{Xt}e^{Yt}+e^{Xt}Ye^{Yt}=Xe^{Xt}e^{Yt}+e^{Xt}Ye^{-Xt}e^{Xt}e^{Yt}=(X+e^{Xt}Ye^{-Xt})\phi(t)$

Démonstration préliminaire :
Notons : [A,B]=AB-BA=C avec A et B deux matrices n×n complexes
On prendra en hypothèse que [A,C]=[B,C]=0

$[A,B^2]=AB^2-B^2A=ABB-BBA=(C+BA)B-BBA=CB+BAB-BBA=CB+BC=2CB$
$[A,B^3]=AB^3-B^3A=AB^2B-BB^2A=(2CB+B^2A)B-BB^2A=2CB^2+B^2AB-B^2BA$
$=2CB^2+B^2C=3CB^2$
Supposons que l'on ait: $[A,B^{n-1}]=(n-1)CB^{n-2}$
Alors : $[A,B^n]=[A,BB^{n-1}]=ABB^{n-1}-BB^{n-1}A=ABB^{n-1}-BAB^{n-1}+BAB^{n-1}-BB^{n-1}A$
$=[A,B]B^{n-1}+B[A,B^{n-1}]=CB^{n-1}+B(n-1)CB^{n-2}=CB^{n-1}+(n-1)CB^{n-1}=n\,CB^{n-1}$
Donc: **$[A,B^n]=n[A,B]B^{n-1}$**

On applique cette relation au commutateur $[Y,e^{Xt}]$

$$[Y,e^{Xt}]=[Y,\sum_n\frac{(Xt)^n}{n!}]=\sum_n\frac{t^n}{n!}[Y,X^n]=\sum_n\frac{t^n}{n!}n[Y,X]X^{n-1}=Ye^{Xt}-e^{Xt}Y$$

$$\Rightarrow(X+\left(e^{Xt}Y\right)e^{-Xt})\phi(t)=(X+\left(Ye^{Xt}+[X,Y]\sum_n\frac{t^n}{n!}nX^{n-1}\right)e^{-Xt})\phi(t)$$

$$=(X+\left(Ye^{Xt}+[X,Y]t\sum_{n>0}\frac{(Xt)^{n-1}}{(n-1)!}\right)e^{-Xt})\phi(t)=(X+\left(Ye^{Xt}+[X,Y]te^{Xt}\right)e^{-Xt})\phi(t)$$

$$=(X+Y+t[X,Y])\phi(t)=\frac{d\phi(t)}{dt}\Rightarrow\frac{d\phi(t)}{\phi(t)}=(X+Y+t[X,Y])dt$$

$$\Rightarrow Ln(\phi(t))=tX+tY+\frac{t^2}{2}[X,Y]+Cte\Rightarrow\phi(t)=Ke^{tX+tY+\frac{t^2}{2}[X,Y]}=e^{Xt}e^{Yt}$$

En prenant $t=0:\phi(0)=1=K$

En prenant $t=1: e^Xe^Y=e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]}$

*****