

Fonction génératrice des polynômes de Legendre

On rappelle la définition des polynômes de Legendre : $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$

Sa fonction génératrice est alors : $F_p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$

Or, d'après le théorème des résidus :

$$\int_C \frac{(z^2 - 1)^n}{z - x} dz = 2i\pi (x^2 - 1)^n \quad \text{où } C \text{ est un cercle de centre } O \text{ et de rayon } 1 \text{ avec } |x| < 1$$

$$\Rightarrow (x^2 - 1)^n = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{(z^2 - 1)^n}{z - x} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_C (z^2 - 1)^n (z - x)^{-1} dz$$

$$\Rightarrow \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \frac{1}{2i\pi} \int_C (z^2 - 1)^n \frac{d^n}{dx^n} [(z - x)^{-1}] dz$$

$$\text{or : } \frac{d}{dx} [(z - x)^{-1}] = (z - x)^{-2} \quad \frac{d^2}{dx^2} [(z - x)^{-1}] = 2(z - x)^{-3}$$

$$\frac{d^3}{dx^3} [(z - x)^{-1}] = 3!(z - x)^{-4} \Rightarrow \frac{d^n}{dx^n} [(z - x)^{-1}] = n!(z - x)^{-(n+1)}$$

$$\Rightarrow P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{1}{2i\pi} \int_C (z^2 - 1)^n \frac{d^n}{dx^n} [(z - x)^{-1}] dz$$

$$= \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{1}{2i\pi} \int_C (z^2 - 1)^n n! (z - x)^{-(n+1)} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} \frac{n!}{2^n \cdot n!} dz$$

$$\Rightarrow P_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz$$

Etudions maintenant les conditions de convergence de $F_p(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) t^n$

Soit un réel t non nul : $t^n P_n(x) = \frac{t^n}{2^n} \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz$

Calculons : $\sum_n t^n P_n(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{dz}{z-x} \sum_n \left(\frac{t}{2} \frac{z^2-1}{z-x} \right)^n$

Comme $z \in C$: $|z-x| = |\cos \theta - x + i \sin \theta| = \sqrt{1-2x \cos \theta + x^2} > \sqrt{(1-x)^2} = |1-x| > 1-|x|$

et : $|1-z^2| = |1-e^{2i\theta}| = |1-\cos 2\theta - i \sin 2\theta| = \sqrt{(1-\cos 2\theta)^2 + \sin^2 2\theta}$

$= \sqrt{2(1-\cos 2\theta)} = \sqrt{4\sin^2 \theta} = 2|\sin \theta| \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2}|1-z^2| \leq 1$

$\Rightarrow \left| \frac{t}{2} \frac{z^2-1}{z-x} \right| < \left| \frac{t}{z-x} \right| < \left| \frac{t}{1-|x|} \right| < 1 \quad \text{si } |t| < 1-|x|$

Dans ces conditions nous avons une série géométrique convergente :

$$\sum_n \left(\frac{t}{2} \frac{z^2-1}{z-x} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1 - \left(\frac{t}{2} \frac{z^2-1}{z-x} \right)^{n+1}}{1 - \frac{t}{2} \frac{z^2-1}{z-x}} \right] = \frac{1}{1 - \frac{t}{2} \frac{z^2-1}{z-x}} = \frac{-2(z-x)}{tz^2 - 2z + 2x + t}$$

$$\Rightarrow \sum_n t^n P_n(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C dz \frac{1}{(z-x) \left(1 - \frac{t}{2} \frac{z^2-1}{z-x} \right)} = \frac{1}{2i\pi} \int_C dz \frac{1}{-z^2 \frac{t}{2} + z - x + \frac{t}{2}}$$

$$\Delta(x) = 1 - 4 \left(-\frac{t}{2} \right) \left(-x + \frac{t}{2} \right) = -2xt + 1 + t^2 \Rightarrow \Delta'(x) = -2t$$

Si $t < 0$ $\Delta(x)$ est croissante : $\Delta(-1) = (1+t)^2 > 0 \Rightarrow \Delta > 0$

Si $t > 0$ $\Delta(x)$ est décroissante : $\Delta(1) = (1-t)^2 > 0 \Rightarrow \Delta > 0$

$\sqrt{\Delta}$ est donc toujours défini. Le dénominateur est alors :

$$-z^2 \frac{t}{2} + z - x + \frac{t}{2} = -\frac{t}{2} \left(z - \frac{1}{t} (1 + \sqrt{\Delta}) \right) \left(z - \frac{1}{t} (1 - \sqrt{\Delta}) \right)$$

en notant : $a = \frac{1}{t} (1 + \sqrt{\Delta(x)})$ et $b = \frac{1}{t} (1 - \sqrt{\Delta(x)})$ sans oublier : $|t| \leq 1 - |x| < 1$

$$\sum_n t^n P_n(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C dz \frac{1}{-\frac{t}{2} (z-a)(z-b)}$$

Il faut maintenant déterminer la position des pôles a et b :

Etudions $a(x) = \frac{1}{t}(1 + \sqrt{\Delta}) \Rightarrow a'(x) = -\frac{\Delta'(x)}{2t\sqrt{\Delta(x)}} = \frac{1}{\sqrt{-2xt+1+t^2}} > 0$

$a(x)$ est donc croissante ainsi que $\Delta(x)$:

$$a(x) < a(1) = \frac{2-t}{t} = -1 + \frac{2}{t} \quad \text{Si } t < 0 \quad \text{alors } a(x) < -1$$

$$a(x) > a(-1) = \frac{2+t}{t} = 1 + \frac{2}{t} \quad \text{Si } t > 0 \quad \text{alors } a(x) > 1$$

$a(x)$ est donc en dehors du cercle

Etudions $b(x) = \frac{1}{t}(1 - \sqrt{\Delta(x)})$

$$b'(x) = -\frac{\Delta'(x)}{2t\sqrt{\Delta(x)}} = \frac{1}{\sqrt{-2xt+1+t^2}} > 0$$

$b(x)$ est donc croissante ainsi que $\Delta(x)$

$$b(x) > b(-1) = \frac{1}{t}(1 - \sqrt{\Delta(-1)}) = \frac{1}{t}(1 - 1 - t) = -1$$

$$b(x) < b(1) = \frac{1}{t}(1 - \sqrt{\Delta(1)}) = \frac{1}{t}(1 - 1 + t) = 1$$

$b(x)$ est donc à l'intérieur du cercle

D'après le théorème des résidus il vient alors :

$$\int_c dz \frac{1}{-\frac{t}{2}(z-a)(z-b)} = 2i\pi \frac{1}{-\frac{t}{2}(b-a)} = \frac{-4i\pi}{t(b-a)} = \frac{2i\pi}{\sqrt{\Delta(x)}}$$

$$\Rightarrow \sum_n t^n P_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta(x)}} \Rightarrow F_p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}}$$