# Intégrale de Fresnel $I=\int_0^{+\infty} e^{ix^2}dx$

$$I=\int_0^{+\infty} e^{ix^2}dx=\int_0^{+\infty}\cos x^2dx+i\int_0^{+\infty}\sin x^2dx$$

Posons : $I_1=\int_a^b \cos x^2dx=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{2x\cos x^2}{x}dx \qquad 0\le a\le b$

Soit $u=\frac{1}{x}\Rightarrow du=-\frac{1}{x^2}dx \qquad$ soit $dv=2x\cos x^2dx\Rightarrow v=\sin x^2$

$$\Rightarrow I_1=\frac{1}{2}[\frac{\sin x^2}{x}]_a^b+\frac{1}{2}\int_a^b\frac{\sin x^2}{x^2}dx=\frac{\sin b^2}{2b}-\frac{\sin a^2}{2a}+\frac{1}{2}\int_a^b\frac{\sin x^2}{x^2}dx$$

Au voisinage de 0 : $\frac{\sin a^2}{2a}\approx\frac{a^2}{2a}=\frac{a}{2}\to 0 \qquad$ et : $\frac{\sin x^2}{x^2}\approx 1$

Au voisinage de $+\infty$: $\left|\frac{\sin b^2}{2b}\right|\to 0 \qquad$ et : $\left|\frac{\sin x^2}{x^2}\right|\to 0$

Donc $I_1$ est bien convergente lorsque $a\to 0$ et $b\to+\infty$

Posons : $I_2=\int_a^b \sin x^2dx=\frac{1}{2}\int_a^b\frac{2x\sin x^2}{x}dx \qquad 0\le a\le b$

Soit $u=\frac{1}{x}\Rightarrow du=-\frac{1}{x^2}dx \qquad$ soit $dv=2x\sin x^2dx\Rightarrow v=1-\cos x^2$

$$\Rightarrow I_2=\frac{1}{2}[\frac{1-\cos x^2}{x}]_a^b+\frac{1}{2}\int_a^b\frac{1-\cos x^2}{x^2}dx=\frac{1-\cos b^2}{2b}-\frac{1-\cos a^2}{2a}+\frac{1}{2}\int_a^b\frac{1-\cos x^2}{x^2}dx$$

Au voisinage de 0 : $\frac{1-\cos a^2}{2a}\approx\frac{1-1+\frac{a^4}{2}}{2a}=\frac{a^3}{4}\to 0 \qquad$ et : $\frac{1-\cos x^2}{x^2}=\frac{1-1+\frac{x^4}{2}}{x^2}\approx 0$

Au voisinage de $+\infty$: $\left|\frac{1-\cos b^2}{2b}\right|\to 0 \qquad$ et : $\left|\frac{1-\cos x^2}{x^2}\right|\to 0$

Donc $I_2$ est bien convergente lorsque $a\to 0$ et $b\to+\infty$

Donc $e^{ix^2}$ est bien sommable sur $\mathbb{R}^+$

## Calcul de l'intégrale de Fresnel par une intégrale à paramètre

Considérons pour tout réel t la fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ définie par $u\to\frac{e^{-(u^2+i)t^2}}{u^2+i}$

Cette fonction est intégrable, car continue sur $\mathbb{R}^+$ et majorée : $\left|\frac{e^{-(u^2+i)t^2}}{u^2+i}\right| = \frac{\left|e^{-u^2t^2}\right|}{\sqrt{u^4+1}} \leq \frac{1}{u^2}$ qui est intégrable en $+\infty$.

Il est donc possible de poser f, la fonction définie pour tout t par l'intégrale suivante:

$$f(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(u^2+i)t^2}}{u^2+i} du$$

On montre que f est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle à l'infini, et qu'elle est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, f'(t) = -2te^{-it^2} \int_0^{+\infty} e^{-u^2t^2} du$$

En effet, en appliquant les deux théorèmes de la convergence dominée :

- Continuité sur $\mathbb{R}$ et nullité à l'infini (théorème 1)
  - Pour tout $u \in \mathbb{R}^{+*}$, la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{C}, t \to \frac{e^{-(u^2+i)t^2}}{u^2+i}$ est continue et nulle à l'infini.
  - Pour tout réel $t$, la fonction $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}, u \to \frac{e^{-(u^2+i)t^2}}{u^2+i}$ est continue donc mesurable.
  - Condition de domination : $\forall (t,u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}, \left|\frac{e^{-(u^2+i)t^2}}{u^2+i}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{1+u^4}}$

    Cette fonction majorante est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$ et nulle à l'infini.

- Classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et valeur de la dérivée (théorème 2)
  - Pour tout $u \in \mathbb{R}^+$, la fonction $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{C}, t \to \frac{e^{-(u^2+i)t^2}}{u^2+i}$ est dérivable et sa dérivée, $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{C}, \quad t \to -2te^{-(u^2+i)t^2}$ est continue.
  - Pour tout $t \in \mathbb{R}^{+*}$, la fonction $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{C}, \quad t \to -2te^{-(u^2+i)t^2}$ est mesurable.
  - Condition de domination : confinons le paramètre t à l'intervalle ]a,b[ avec 0<a<b

    $\forall (t,u) \in ]a,b[ \times \mathbb{R}^+, \left|-2te^{-(u^2+i)t^2}\right| \leq 2be^{-u^2a^2}$ et la fonction $u \to 2be^{-u^2a^2}$ est intégrale sur $\mathbb{R}^+$
  - Conclusion : f est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et

$$\forall t\in\mathbb{R}^{+*}, f'(t)=\frac{d}{dt}[\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(u^2+i)t^2}}{u^2+i}du]'=-\int_0^{+\infty}2t(u^2+i)\frac{e^{-(u^2+i)t^2}}{u^2+i}du=-2te^{-it^2}\int_0^{+\infty}e^{-u^2t^2}du$$

**Calcul de** $I=\int_0^{+\infty}e^{-a^2x^2}dx$

$$I^2=(\int_0^{+\infty}e^{-a^2x^2}dx)(\int_0^{+\infty}e^{-a^2y^2}dy)=\int_0^{+\infty}e^{-a^2(x^2+y^2)}dxdy$$

En passant en coordonnées polaires : $r^2=x^2+y^2$

$x\in[0,+\infty[\ ,\ y\in[0,+\infty[\Rightarrow r\in[0,+\infty[\quad,\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$

$$I^2=\int_0^{+\infty}re^{-a^2r^2}dr\int_0^{\pi/2}d\theta=-\frac{\pi}{4a^2}\int_0^{+\infty}(-2ra^2)e^{-a^2r^2}dr=-\frac{\pi}{4a^2}[e^{-a^2r^2}]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4a^2}$$

$$\Rightarrow I=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}$$

$$\Rightarrow f'(\omega)=-e^{-i\omega^2}\sqrt{\pi}\Rightarrow f(t)-f(0)=\int_0^t f'(\omega)d\omega=-\sqrt{\pi}\int_0^t e^{-i\omega^2}d\omega$$

$$\Rightarrow f(t)=f(0)-\sqrt{\pi}\int_0^t e^{-i\omega^2}d\omega\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(u^2+i)t^2}}{u^2+i}du=\int_0^{+\infty}\frac{du}{u^2+i}-\sqrt{\pi}\int_0^t e^{-i\omega^2}d\omega$$

En faisant tendre t vers l'infini dans l'expression précédente :

$$0=\int_0^{+\infty}\frac{du}{u^2+i}-\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-i\omega^2}d\omega\Rightarrow\int_0^{+\infty}e^{-i\omega^2}d\omega=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{u^2+i}$$

Donc : $\int_0^{+\infty}e^{-it^2}dt=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{u^2+i}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{u^2-i}{u^4+1}du=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{u^4+1}du-i\int_0^{+\infty}\frac{du}{u^4+1}\right)$

Calculons l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{du}{u^4+1}$

On remarque tout d'abord en posant $v=u^{-1}$ => $dv=-\frac{du}{u^2}=-v^2du\Rightarrow du=-\frac{dv}{v^2}$

$$\int_0^{+\infty}\frac{du}{u^4+1}=-\int_{+\infty}^0\frac{dv}{v^2(\frac{1}{v^4}+1)}=-\int_{+\infty}^0\frac{dv}{\frac{1}{v^2}+v^2}=\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^4}du\Rightarrow\int_0^{+\infty}e^{-it^2}dt=\frac{1-i}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{u^4+1}$$

Ensuite en remarquant :

$$u^4+1=(u^2+1)^2-2u^2=(u^2+1+u\sqrt{2})(u^2+1-u\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u^4+1}=\frac{au+b}{u^2+1-u\sqrt{2}}+\frac{cu+d}{u^2+1+u\sqrt{2}}$$

$$\bullet u\to+\infty:\frac{u}{u^4+1}=\frac{au^2+bu}{u^2+1-u\sqrt{2}}+\frac{cu^2+du}{u^2+1+u\sqrt{2}}\Rightarrow 0=a+c$$

$$\bullet u=0:\quad 1=b+d$$

$$\bullet u=1:\frac{1}{2}=\frac{a+b}{2-\sqrt{2}}+\frac{c+d}{2+\sqrt{2}}=\frac{(a+b)(2+\sqrt{2})+(c+d)(2-\sqrt{2})}{4-2}$$

$$=\frac{a(2+\sqrt{2})+b(2+\sqrt{2})+c(2-\sqrt{2})+d(2-\sqrt{2})}{2}$$

$$\Rightarrow a(2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2})+b(2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2})+2-\sqrt{2}=2a\sqrt{2}+2b\sqrt{2}=-1+\sqrt{2}$$

$$\bullet u=-1:\frac{1}{2}=\frac{-a+b}{2+\sqrt{2}}+\frac{-c+d}{2-\sqrt{2}}=\frac{(-a+b)(2-\sqrt{2})+(-c+d)(2+\sqrt{2})}{2}$$

$$=\frac{-a(2-\sqrt{2})+b(2-\sqrt{2})-c(2+\sqrt{2})+d(2+\sqrt{2})}{2}\Rightarrow 1=-a(2-\sqrt{2})+b(2-\sqrt{2})+a(2+\sqrt{2})+(1-b)(2+\sqrt{2})$$

$$1=2a\sqrt{2}-2b\sqrt{2}+2+\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 2a\sqrt{2}-2b\sqrt{2}=-1-\sqrt{2}\Rightarrow\begin{cases}2a\sqrt{2}+2b\sqrt{2}=-1+\sqrt{2}\\2a\sqrt{2}-2b\sqrt{2}=-1-\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-c\quad\text{et}\quad b=\frac{1}{2}\quad\text{et}\quad d=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{u^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{-u+\sqrt{2}}{u^2+1-u\sqrt{2}}+\frac{u+\sqrt{2}}{u^2+1+u\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{-2u+\sqrt{2}}{u^2+1-u\sqrt{2}}+\frac{2u+\sqrt{2}}{u^2+1+u\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{u^2+1-u\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{u^2+1+u\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{du}{u^4+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\int_0^{+\infty}\frac{d(u^2+1-u\sqrt{2})}{u^2+1-u\sqrt{2}}+\int_0^{+\infty}\frac{d(u^2+1+u\sqrt{2})}{u^2+1+u\sqrt{2}}+\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{2}du}{u^2+1-u\sqrt{2}}+\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{2}du}{u^2+1+u\sqrt{2}}\right)$$

$$=-\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\ln(u^2+1-u\sqrt{2})\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\ln(u^2+1+u\sqrt{2})\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{2}du}{(u-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{2}du}{(u+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\overbrace{\left[\ln\frac{u^2+1+u\sqrt{2}}{u^2+1-u\sqrt{2}}\right]_0^{+\infty}}^{0}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\frac{d(u\sqrt{2}-1)}{(u\sqrt{2}-1)^2+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\frac{d(u\sqrt{2}+1)}{(u\sqrt{2}+1)^2+1}$$

En posant $x=u\sqrt{2}-1$ : $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=[\arctan\theta]_{-1}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

En posant $x=u\sqrt{2}+1$ : $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=[\arctan\theta]_{1}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$

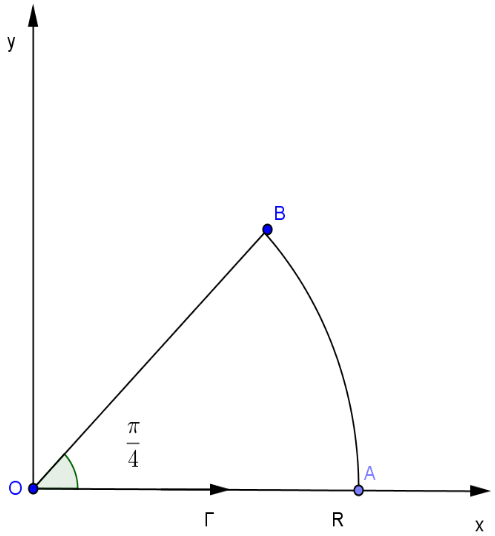
$$\Rightarrow\int_0^{+\infty}\frac{du}{u^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\Rightarrow\int_0^{+\infty}e^{-it^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1-i)$$

.

## Calcul de l'intégrale de Fresnel par intégration dans $\mathbb{C}$

Considérons la fonction holomorphe $f(z) = e^{-z^2}$ . Intégrons cette fonction sur le contour du plan complexe défini par :

- Le segment réel $0 \leq x \leq R$
- L'arc de cercle $z = Re^{-i\theta}$ avec $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$
- Le segment complexe $re^{i\frac{\pi}{4}}$ avec $0 \leq r \leq R$




D'après le théorème des résidus : $\int_\Gamma e^{-z^2} dz = 0$

Sur OA, $z=x \Rightarrow f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow I_1(R) = \int_0^R e^{-x^2} dx$

Sur l'arc AB,

$$z = Re^{i\theta} \Rightarrow z^2 = R^2 \cos 2\theta + R^2 \sin 2\theta \Rightarrow f(z) = e^{-R^2(\cos 2\theta + \sin 2\theta)} \Rightarrow I_2(R) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2(\cos 2\theta + \sin 2\theta)} d\theta$$

Sur BO, z=rcosθ+irsinθ :

$$z = \frac{r}{\sqrt{2}} + i\frac{r}{\sqrt{2}} \Rightarrow dz = \frac{1+i}{\sqrt{2}} dr \qquad \text{et : } z^2 = ir^2 \Rightarrow I_3(R) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_R^0 e^{-ir^2} dr$$

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0 = \int_0^R e^{-x^2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\theta + R^2 \sin 2\theta} d\theta - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-ir^2} dr \Rightarrow \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^R e^{-ir^2} dr = \int_0^R e^{-x^2} dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2(\cos 2\theta + \sin 2\theta)} d\theta$$

En remarquant que : $\cos 2\theta + \sin 2\theta = \sqrt{2}\sin(2\theta + \frac{\pi}{4})$ est minimum en $\theta = 0$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

Donc :

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2(\cos 2\theta + \sin 2\theta)} d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2} d\theta = \frac{\pi}{4} e^{-R^2}$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{R \to \infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2(\cos 2\theta + \sin 2\theta)} d\theta = 0$

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^{R} e^{-ir^2} dr = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} e^{-ir^2} dr = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-ir^2} dr = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}(1+i)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(\frac{1-i}{2})$$