

Antoine Tardivo	Contribution Wikipedia Propriétés des formes linéaires continues	le 31-oct.-13
-----------------	---	---------------

Propriétés des formes linéaires continues dans le cas d'espaces vectoriels de dimension finie

Une forme linéaire est continue:

- $\Leftrightarrow$ Elle est continue à l'origine
- $\Leftrightarrow$ Elle est bornée sur la boule unité
- $\Leftrightarrow$ C'est une application Lipschitzienne
- $\Leftrightarrow$ Elle présente une continuité uniforme
- $\Leftrightarrow$ Son noyau est un fermé

Démonstration

1) φ est une forme linéaire continue $\Leftrightarrow \varphi$ est continue à l'origine

- Preuve : $\Rightarrow$

φ est une forme linéaire continue. Par définition elle est donc continue en 0

- Preuve : $\Leftarrow$

φ est une forme linéaire continue en 0:

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \|x - 0\| < \eta \Rightarrow \|\varphi(x) - \varphi(0)\| < \varepsilon$$

$$\text{Comme } \varphi(0) = 0 : \|x\| < \eta \Rightarrow \|\varphi(x)\| < \varepsilon$$

On ne change rien au problème si on pose $x=y-z$ et on utilise la linéarité de φ :

$$\Leftrightarrow \|y - z\| < \eta \Rightarrow \|\varphi(y - z)\| < \varepsilon \Leftrightarrow \|\varphi(y) - \varphi(z)\| < \varepsilon$$

Cela démontre la continuité sur E de φ

Donc: **φ est une forme linéaire continue $\Leftrightarrow \varphi$ est continue à l'origine**

2) φ est une forme linéaire continue $\Leftrightarrow \varphi$ est bornée sur la boule unité

- Preuve : $\Rightarrow$

Il a été démontré précédemment que:

Antoine Tardivo	Contribution Wikipedia Propriétés des formes linéaires continues	le 31-oct.-13
-----------------	---	---------------

φ est une forme linéaire continue $\Leftrightarrow \varphi$ est continue à l'origine. Donc:

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / (\|x\| < \eta \Rightarrow \|\varphi(x)\| < \varepsilon) \Leftrightarrow \left(\left\| \frac{x}{\eta} \right\| < 1 \Rightarrow \left\| \frac{\varphi(x)}{\eta} \right\| < \frac{\varepsilon}{\eta} \right) \Leftrightarrow \left(\left\| \frac{x}{\eta} \right\| < 1 \Rightarrow \left\| \varphi\left(\frac{x}{\eta}\right) \right\| < \frac{\varepsilon}{\eta} \right) \\ \Leftrightarrow (x \in B(0,1) \Rightarrow \exists r > 0 / \|\varphi(x)\| < r)$$

φ est donc bornée sur la boule unité.

- Preuve : $\Leftarrow$

$$\text{Hypothèse: } (x \in B(0,1) \Rightarrow \exists r > 0 / \|\varphi(x)\| < r) \Leftrightarrow (0 < \left| \varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right| \leq m) \Leftrightarrow |\varphi(x)| \leq m \|x\| < r)$$

φ est donc Lipschitzienne. Elle est donc continue. Il en résulte :

φ est une forme linéaire continue $\Leftrightarrow \varphi$ est bornée sur la boule unité

3) φ est une forme linéaire continue $\Leftrightarrow \varphi$ est Lipschitzienne $\Leftrightarrow \varphi$ est uniformément continue

Ces équivalences dérivent directement de ce qui précède et de la continuité uniforme et donc de celle des fonctions Lipschitziennes pour les espaces vectoriels de dimension finie.

4) φ est une forme linéaire continue $\Leftrightarrow \text{Ker } \varphi$ est un fermé

- Preuve : $\Rightarrow$

φ étant continue alors par définition de $\text{Ker } \varphi$: $\text{Ker } \varphi = \{x \in E, \varphi(x) = 0\} = \{\varphi^{-1}(0)\}$

Le noyau est donc l'image réciproque du fermé $\{0\}$. C'est donc un fermé.

Donc: φ est une forme linéaire continue $\Rightarrow \text{Ker } \varphi$ est un fermé

- Preuve : $\Leftarrow$

Hypothèse: $\text{Ker } \varphi$ est un fermé de E.

Supposons que φ soit discontinue. Elle n'est donc pas bornée sur la boule unité. Il existe donc une suite x_n de la boule unité qui vérifie pour tout entier $n > N_0$: $|\varphi(x_n)| > 0$

Soit u un élément de E. Construisons la suite: $u_n = u - \frac{\varphi(u)}{\varphi(x_n)} x_n$

φ étant une forme linéaire :

Antoine Tardivo	Contribution Wikipedia Propriétés des formes linéaires continues	le 31-oct.-13
-----------------	---	---------------

$$\Rightarrow \varphi(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi(u_n) = \varphi(u) - \varphi\left[\frac{\varphi(u)}{\varphi(x_n)} x_n\right] = \varphi(u) - \frac{\varphi(u)}{\varphi(x_n)} \varphi(x_n) = 0$$

u_n appartient donc au noyau. Le noyau étant un fermé, u appartient donc aussi au noyau. Donc tout élément u de E appartient au noyau. : φ est donc identiquement nulle. Elle est donc continue, ce qui contredit l'hypothèse de discontinuité faite au départ.

Donc: **φ est une forme linéaire continue $\Leftrightarrow \text{Ker } \varphi$ est un fermé**