Interaction entre deux dipôles magnétiques

Soient deux dipôles D_1 et D_2 et leur moment magnétique respectif $\overrightarrow{\mu_1}$ et $\overrightarrow{\mu_2}$. Appelons E_p l'interaction du moment magnétique $\overrightarrow{\mu_2}$ avec le champ créé par $\overrightarrow{\mu_1}$ au niveau de D_2.

Le moment magnétique $\overrightarrow{\mu_1}$ de D_1 crée à la distance r (considérée grande) le potentiel vecteur $\overrightarrow{A_1}$: $\overrightarrow{A_1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\overrightarrow{\mu_1} \wedge \vec{r}}{r^3}$

Ce potentiel vecteur crée en $\vec{r}$ un champ magnétique $\overrightarrow{B_1} = \vec{\nabla} \wedge \overrightarrow{A_1}$. En fixant arbitrairement $\overrightarrow{\mu_1}$ selon l'axe Oz :

$$\overrightarrow{A_1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\mu_1\frac{\overrightarrow{e_z} \wedge \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\mu_1\frac{\sin\theta}{r^2}\overrightarrow{e_\varphi} = A_\varphi \overrightarrow{e_\varphi} \textit{ en coordonnées polaires}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{B_1} = \vec{\nabla} \wedge \overrightarrow{A_1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial\left(\sin\theta A_\varphi\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right) \\ \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \sin\theta\frac{\partial\left(rA_\varphi\right)}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta A_\varphi\right)}{\partial\theta} \\ -\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rA_\varphi\right)}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu_0}{4\pi}\mu_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{r^3\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin^2\theta\right)}{\partial\theta} \\ -\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\left(r^{-1}\right)}{\partial r} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\mu_1 \begin{pmatrix} \frac{2\cos\theta}{r^3} \\ \frac{\sin\theta}{r^3} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(2\left(\overrightarrow{\mu_1}.\vec{u}\right)\vec{u} + \mu_1\sin\theta\overrightarrow{e_\theta}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(3\left(\overrightarrow{\mu_1}.\vec{u}\right)\vec{u} + \mu_1\sin\theta\overrightarrow{e_\theta} - \mu_1\cos\theta\vec{u}\right)$$

$$or : \begin{cases} \vec{u} = \sin\theta\cos\varphi\vec{e_x} + \sin\theta\sin\varphi\vec{e_y} + \cos\theta\vec{e_z} \\ \vec{e_\theta} = \dfrac{\partial\vec{u}}{\partial\theta} = \cos\theta\cos\varphi\vec{e_x} + \cos\theta\sin\varphi\vec{e_y} - \sin\theta\vec{e_z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta\vec{u} = \cos\theta\sin\theta\cos\varphi\vec{e_x} + \cos\theta\sin\theta\sin\varphi\vec{e_y} + \cos^2\theta\vec{e_z} \\ -\sin\theta\vec{e_\theta} = -\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\vec{e_x} - \cos\theta\sin\theta\sin\varphi\vec{e_y} + \sin^2\theta\vec{e_z} \end{cases} \Rightarrow \cos\theta\vec{u} - \sin\theta\vec{e_\theta} = \vec{e_z}$$

$$\Rightarrow \vec{B_1} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A_1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\left(\vec{\mu_1}.\vec{u}\right)\vec{u} - \vec{\mu_1}}{r^3}\right)$$

Du fait de D_1 il va y avoir la création d'une énergie potentielle d'interaction sur D_2 :

$$E_p = -\vec{\mu_2}.\vec{B_1}$$

$$\Rightarrow E_p = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(3\vec{\mu_2}.\left(\vec{\mu_1}.\vec{u}\right)\vec{u} - \vec{\mu_2}.\vec{\mu_1}\right) = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(3\left(\vec{\mu_1}.\vec{u}\right)\left(\vec{\mu_2}.\vec{u}\right) - \vec{\mu_1}.\vec{\mu_2}\right)$$

C'est à partir de cette expression que l'on peut mettre en évidence, par la théorie des perturbations, la structure fine dans le spectre de résonance magnétique résultant de l'interaction des spins de 2 particules formant ainsi des dipôles magnétiques.

Interaction entre deux dipôles électriques

Soient deux dipôles D_1 et D_2 placés respectivement en A et B ($\vec{AB} = \vec{r} = r\vec{u}$; $\vec{OA} = \vec{r_A}$ $\vec{OB} = \vec{r_B}$) . Leur moment électrostatique respectif est noté : $\vec{p_1} = q\vec{r_A}$ *et* $\vec{p_2} = q\vec{r_B}$.

D_1 crée en $\vec{r}$ un potentiel électrique V qui interagit avec D_2. Cela donne naissance à une énergie d'interaction E_p. Un champ électrique $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ dérive du potentiel V($\vec{r}$).

Si $\vec{r}$ est suffisamment grand, nous savons que : $V(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\vec{p_1}.\vec{r}}{r^3}$

Il s'en suit :

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}V(\vec{r})=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{r_A}.\vec{r}}{r^3}\right)=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\vec{r_A}.\vec{r}}{r^3}\\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\vec{r_A}.\vec{r}}{r^3}\right)\\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\vec{r_A}.\vec{r}}{r^3}\right)\end{pmatrix}$$

$$=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{pmatrix}\mathrm{r}_A\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}r^{-2}\\ \mathrm{r}_A\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial\theta}\cos\theta\\ 0\end{pmatrix}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{pmatrix}-2\frac{\mathrm{r}_A}{r^3}\cos\theta\\ -\frac{\mathrm{r}_A}{r^3}\sin\theta\\ 0\end{pmatrix}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{r}_A}{r^3}\left(2\cos\theta\vec{u}+\sin\theta\vec{e_\theta}\right)$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{r}_A}{r^3}\left(3\cos\theta\vec{u}-\cos\theta\vec{u}+\sin\theta\vec{e_\theta}\right)$$

$$or:\begin{cases}\vec{u}=\sin\theta\cos\varphi\vec{e_x}+\sin\theta\sin\varphi\vec{e_y}+\cos\theta\vec{e_z}\\ \vec{e_\theta}=\frac{\partial\vec{u}}{\partial\theta}=\cos\theta\cos\varphi\vec{e_x}+\cos\theta\sin\varphi\vec{e_y}-\sin\theta\vec{e_z}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos\theta\vec{u}=\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\vec{e_x}+\cos\theta\sin\theta\sin\varphi\vec{e_y}+\cos^2\theta\vec{e_z}\\ -\sin\theta\vec{e_\theta}=-\cos\theta\sin\theta\cos\varphi\vec{e_x}-\cos\theta\sin\theta\sin\varphi\vec{e_y}+\sin^2\theta\vec{e_z}\end{cases}\Rightarrow\cos\theta\vec{u}-\sin\theta\vec{e_\theta}=\vec{e_z}$$

$$\Rightarrow\vec{E}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{r}_A}{r^3}\left(-3\cos\theta\vec{u}+\cos\theta\vec{u}-\sin\theta\vec{e_\theta}\right)=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(\mathrm{r}_A\vec{e_z}-3\mathrm{r}_A\cos\theta\vec{u}\right)=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(\mathrm{r}_A\vec{e_z}-3\left(\vec{\mathrm{r}_A}.\vec{u}\right)\vec{u}\right)$$

En fixant arbitrairement $\vec{\mathrm{r}_A}=\mathrm{r}_A\vec{e_z}$: $\vec{E}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(\vec{\mathrm{r}_A}-3\left(\vec{\mathrm{r}_A}.\vec{u}\right)\vec{u}\right)$

L'interaction dipôle-dipôle est alors :

$$E_p=-\vec{E}.\vec{\mathrm{p}_2}=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^3}\left(3\left(\vec{\mathrm{p}_1}.\vec{u}\right)\left(\vec{\mathrm{p}_2}.\vec{u}\right)-\vec{\mathrm{p}_1}.\vec{\mathrm{p}_2}\right)$$

En posant : $e^2=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\Rightarrow E_{\mathrm{p}}=\frac{e^2}{R^3}\left(\vec{\mathrm{r}_A}.\vec{\mathrm{r}_B}-3\left(\vec{\mathrm{r}_A}.\vec{u}\right)\left(\vec{\mathrm{r}_B}.\vec{u}\right)\right)$

Cette expression permet de mettre en évidence, par la théorie des perturbations, les forces de Van der Waals qui interviennent dans les liaisons chimiques résultant de l'interaction électrostatique entre deux particules formant ainsi des dipôles électriques.