Expression de la fonction de Bessel de première espèce sous la forme de série entière par la méthode des résidus

On rappelle :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - x\sin\theta)d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(x\sin\theta)d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(n\theta)\sin(x\sin\theta)d\theta \qquad \text{avec n entier}$$

Exprimons cos et sin par leur série entière respective :

$$\cos(x\sin\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}(-)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\sin^{2k}\theta \qquad \sin(x\sin\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}(-)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\sin^{2k+1}\theta$$

Donc : $J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sum_{k=0}^{\infty}(-)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\cos(n\theta)\sin^{2k}\theta d\theta + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sum_{k=0}^{\infty}(-)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\sin(n\theta)\sin^{2k+1}\theta d\theta$

Les deux séries $\left|\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\cos(n\theta)\sin^{2k}\theta\right|$ et : $\left|\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\sin(n\theta)\sin^{2k+1}\theta\right|$ sont majorables par des séries absolument convergentes indépendantes de θ. On peut donc appliquer le théorème de Fubini:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\int_0^\pi \cos(n\theta)\sin^{2k}\theta d\theta + \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\int_0^\pi \sin(n\theta)\sin^{2k+1}\theta d\theta$$

Posons alors $z=e^{iz}$. On a alors :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\frac{(-)^k}{(2i)^{2k+1}}\int_1^{-1}\frac{(z^{2n}+1)(z^2-1)^{2k}}{z^{n+1+2k}}dz - i\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\frac{(-)^k}{(2i)^{2(k+1)}}\int_1^{-1}\frac{(z^{2n}-1)(z^2-1)^{2k+1}}{z^{n+2k+2}}dz$$

Les deux fonctions en z sont des fonctions holomorphes présentant un pôle en z=0. Il est donc possible de calculer leur intégrale sur un contour défini par le cercle unité centré en z=0. D'après le théorème des résidus ces intégrales auront pour valeur :

$$2i\pi \text{Rés}(z=0)$$

où Rés(z=0) est la valeur du résidu de chacune de ces fonctions en z=0, c'est à dire la valeur du coefficient de z^{-1} de leur développement de Laurent respectif. Travaillons tout d'abord sur J_{2m}.

$$J_{2m}(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\frac{1}{(2i)^{2k+1}}\int_1^{-1}\overbrace{\frac{(z^{4m}+1)(z^2-1)^{2k}}{z^{2m+2k+1}}}^{f_{2m}(z)}dz-\frac{i}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\frac{1}{(2i)^{2(k+1)}}\int_1^{-1}\overbrace{\frac{(z^{4m}-1)(z^2-1)^{2k+1}}{z^{2m+2k+2}}}^{g_{2m}(z)}dz$$

$$\text{Avec}:(z^2-1)^{2k}=\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}z^{2p}(-)^{2k-p}$$

$$\Rightarrow f_{2m}(z)=\frac{(z^{4m}+1)(z^2-1)^{2k}}{z^{2m+2k+1}}=\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}z^{2p+2m-2k-1}(-)^{2k-p}+\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}z^{2p-2m-2k-1}(-)^{2k-p}$$

Compte tenu que pour la première somme : 2p+2m-2k-1=-1 => k≥m

le coefficient en z^{-1} de ce polynôme est : $\binom{2k}{k-m}(-)^{k+m}+\binom{2k}{k+m}(-)^{k-m}$ avec k≥m

$$\Rightarrow \text{Rés}(f_{2m},z=0)=\binom{2k}{k-m}(-)^{k+m}+\binom{2k}{k+m}(-)^{k-m}\quad (\text{le résidu est nul pour } k<m)$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma f(z)dz=\int_0^{\pi}\frac{(e^{4i\theta m}+1)(e^{2i\theta}-1)^{2k}}{e^{i\theta(2m+2k+1)}}ie^{i\theta}d\theta+\int_\pi^{2\pi}\frac{(e^{4i\theta m}+1)(e^{2i\theta}-1)^{2k}}{e^{i\theta(2m+2k+1)}}ie^{i\theta}d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi}\cos(2m\theta)\sin^{2k}\theta d\theta=\frac{\pi(-)^m}{2^{2k}}\binom{2k}{k+m}\qquad \text{avec } k\geq m$$

$$\text{Avec}:(z^2-1)^{2k}=\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}z^{2p}(-)^{2k-p}$$

$$\Rightarrow g_{2m}(z)=\frac{(z^{4m}-1)(z^2-1)^{2k+1}}{z^{2m+2k+2}}=\sum_{p=0}^{2k+1}\binom{2k+1}{p}z^{2p+2m-2k-2}(-)^{2k+1-p}-\sum_{p=0}^{2k+1}\binom{2k+1}{p}z^{2p-2m-2k-2}(-)^{2k+1-p}$$

Ce polynôme ne contient pas de termes en z^{-1}. Le résidu de $g_{2m}(z)$ est donc nul à l'intérieur du cercle unité. Il s'en suit :

$$J_{2m}(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{k\geq m}^{\infty}(-)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}\int_0^{\pi}\cos(2m\theta)\sin^{2k}\theta d\theta=\sum_{k\geq m}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\frac{(-)^{k+m}}{2^{2k}}\binom{2k}{k+m}\Rightarrow J_{2m}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2k}\frac{(-)^k}{(2m+k)!k!}$$

Calculons maintenant J_{2m+1}

$$J_{2m+1}(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\frac{(-)^k}{(2i)^{2k+1}}\int_1^{-1}\overbrace{\frac{(z^{2(2m+1)}+1)(z^2-1)^{2k}}{z^{2m+2+2k}}}^{f_{2m+1}(z)}dz-\frac{i}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\frac{(-)^k}{(2i)^{2(k+1)}}\int_1^{-1}\overbrace{\frac{(z^{2(2m+1)}-1)(z^2-1)^{2k+1}}{z^{2m+3+2k}}}^{g_{2m+1}(z)}dz$$

$$\text{Avec}:f_{2m+1}(z)=\frac{(z^{2(2m+1)}+1)(z^2-1)^{2k}}{z^{2m+2+2k}}=\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}z^{2p+2m-2k}(-)^{2k-p}+\sum_{p=0}^{2k}\binom{2k}{p}z^{2p-2m-2-2k}(-)^{2k-p}$$

Nous remarquons que f_{2m+1} n'a pas de terme en z^{-1}. Le résidu de $f_{2m+1}(z)$ est donc nul à l'intérieur du cercle unité.

En revanche pour g_{2m+1} le coefficient de z^{-1} est $\binom{2k+1}{k-m}(-)^{k+m+1}+\binom{2k+1}{k+m+1}(-)^{k-m+1}$

avec k≥m. Donc :

$$\text{Rés}(g_{2m+1}, z=0)=\binom{2k+1}{k-m}(-)^{k+m+1}+\binom{2k+1}{k+m+1}(-)^{k-m+1} \qquad k\geq m$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma g_{2m+1}(z)dz = 2i\pi(-)^{k+m+1}\left\{\binom{2k+1}{k-m}+\binom{2k+1}{k+m+1}\right\}=4i\pi(-)^{k+m+1}\binom{2k+1}{k-m} \qquad k\geq m$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma \frac{(z^{2(2m+1)}-1)(z^2-1)^{2k+1}}{z^{2m+3+2k}}dz=(2i)^{2k+3}\int_0^\pi \sin^{2k+1}\theta\sin(2m+1)\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^\pi \sin^{2k+1}\theta\sin(2m+1)\theta d\theta=\frac{\pi(-)^m}{2^{2k+1}}\binom{2k+1}{k-m} \qquad k\geq m$$

On en déduit :

$$J_{2m+1}(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\int_0^\pi \sin^{2k+1}\theta\sin(2m+1)\theta d\theta=\frac{1}{\pi}\sum_{k=m}^{\infty}(-)^{k+m}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\frac{\pi(-)^m}{2^{2k+1}}\binom{2k+1}{k-m}$$

$$\Rightarrow J_{2m+1}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!(2m+1+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1+2k}$$

Donc pour n quelconque : $J_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$